

L-105: Groupe des permutations d'un ensemble fini:

Références: Rombaldi, Ulmer, OA, Esc.

Développements:

- A_n est simple pour $n \geq 5$
- $\text{Aut}(\tilde{G}_n) = \text{Int}(\tilde{G}_n)$
- Nombre de dérangements.

Plan:

I. Groupe des permutations

1. Définitions et étude de SCE .
2. Générateurs de $\tilde{G}_n$
3. Classes de conjugaison dans $\tilde{G}_n$

II. Signature et groupe alterné

1. Signature
2. Groupe alterné DVT 1

III. Applications

1. Théorie des groupes DVT 3?
2. Déterminant
3. Dérangements DVT 2
4. Matrices de permutation

105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini.

DVTs : Isométries du cube [Rom] [H2G2]

Simplicité du groupe alterné [Rom] [Per]

Isométries du cube [Rom 85] [H2G2 222]

~~Le groupe des isométries du cube est aussi le groupe des isométries de ses sommets qui conservent S .
C'est un groupe fini isomorphe à S_8 .~~

Simplicité du groupe alterné [Rom 50]

Rapport du Jury:

orbites et actions de groupes

thm de décomposition en cycles à supports disjoints.

[Esc 201] [Esc 400]

Thm de Lagrange $|G| = |H| [G:H]$

Morphisme de groupes

Rpte universelle de $(\mathbb{Z}; +)$

$S_E = \{b_{ij} : E \rightarrow E\}$ est un groupe muni de $\circ$.

$S_n = \{b_{ij} : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\}\}$

$S_E \cong S_n$

Transposition

$|S_n| = n!$

I. Groupe des permutations $S(E)$:

1. Définitions et "structure" / $\tilde{G}_n$
2. Cycles et décomposition
3. Signature et groupe alterné
4. Automorphismes de $\tilde{G}_n$

A_n simple

II. Applications

Esc étude de 03, 04

1. Géométrie - isométries, groupe diédral

Agreg-math

I. Groupe des permutation

1. Def : $S(E)$, S_n , cycle, transposition, $|S_n|$.
2. Générateurs : support, orbite, décomp, conjug (et conjugaison)?

II. Signature et groupe alterné

1. Signature:

2. A_n : DVT 1

III. Applications:

1. Théorie des groupes: Cayley, $n \neq 6$ tout automorphisme de S_n est intérieur DVT 2.
2. Alg. lin: déterminant + matrice perm.?
3. Polynômes symétriques:
4. Géométrie: groupe diédral DVT 3.

I. Groupe des permutations:

1. Définitions: E un ensemble

- ① $S(E)$
- ② S_n + action de groupe sur $\{1, \dots, n\}$?
- ③ pour $n \geq 3$ S_n non commut.
- ③ $\sigma \in S_n$, notation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \sigma(1) & \dots & \end{pmatrix}$
- ⑤ Ex de permuta^e $\left\{ \begin{array}{l} \text{④ cycle} \\ \text{⑥ transposition} \end{array} \right.$
- ⑦ Centre de $S(E)$
- ⑧ $S(E) \cong S(F)$ si $\varphi: E \rightarrow F$ bij.
- ⑨ $|S(E)| = n!$

2. Cycles, support et orbites:

- ⑦ r -cycle d'ordre r dans $(S(E), \circ)$
- ⑧ conjugué d'un r -cycle + centralisateur
- ⑨ Support
- ⑩ orbites
- ⑪ permutation = cycle ssi ...
- ⑫ Décomposition en produit de cycles + ⑬ Ex
- ⑭ algo de décomp ?
- ⑭ Décomposition en produit de transposition (DVT ?)
- ⑮ Ex

+ classes de conj (Szynglan 265)

II Signature et groupe alterné:

1. Signature:

C Def signature

C signature = unique morphisme non-trivial

C Prop: transposition ajoute un facteur (-1) .

O Ex

C $\varepsilon(\sigma) = (-1)^p$ ($p = \text{nb transpos}$)

(4) thm expression permutation

O Ex

2. Groupe alterné:

C permutation paire

O Ex

C groupe alterné

C $n \geq 3$ A_n engendré par les 3-cycles

C A_n $n \geq 5$ est simple DVT

C cis: les seuls sous-grps $\triangleleft$ $\overset{\text{de } G_n}{G_n}$ sont $\{Id\}$, A_n et G_n

C sous-groupe d'indice n $\cong G_{n-1}$

III. Applications :

1. Théorie des groupes :

- C Cayley
- C def endo intérieur
- C automorphismes de G_m DVT

2. Déterminant :

- C forme n-linéaire
- forme linéaire alt.

- C forme linéaire anti-sym.

C $\dim(\mathcal{L}_p(E, K)) = n^p$

C Thm 17.3 [Rom 536]

C Thm 17.4 [Rom 537] C Ex

① $\left\{ \begin{array}{c} P \xrightarrow{\sigma} P_0 \\ G_m \xrightarrow{\quad} GL_n(K) \end{array} \right\}$ matrice de permutation

3. Pol sym

- ① def pol sym
- ② Thm pol sym

4. Géométrie

- ① def : groupe diédral

- ② Thm p 57

- ③ Isom cube DVT

5. Arithmétique :

- ① def derangements

② nombre de derangements DVT

- ③ nb permuta^{ts}